HUMBOLDT-UNIVERSITÄT zu BERLIN
Institut für Philosophie
Seminar: Tarskis Wahrheitsdefinition
Prof. Olaf Müller
Semester: SS 2007

Unendlich lange Aussagefunktionen

Name: Astrid Schomäcker
Matrikelnummer: 514928
Philosophie 2. Fachsemester
E-Mail:
Datum: 28.08.2007

I

Wenn wir eine Definition dafür abgeben wollen, wann eine Aussage wahr ist, wollen wir damit möglichst alle wahren Aussagen erfassen. Alfred Tarski nimmt in seiner Definition jedoch unendlich lange Aussagefunktionen aus der Definition aus. Unendlichkeit kann etwas Rätselhaftes an sich haben. Wir können etwas Unendliches nicht überblicken, und in unserem Alltagsleben begegnet uns auch nichts Unendliches. Zwar mag es unendlich viele Zahlen geben, doch jeder von uns nutzt in seinem Leben nur endliche viele. Die meisten Dinge scheinen schon von Natur aus begrenzt. Dennoch hat Unendlichkeit in der Mathematik ihren Platz: Wir müssen nicht die materielle Existenz von irgendetwas Unendlichem annehmen, um Grenzwerte berechnen zu können. Tarski bewegt sich mit seiner Wahrheitsdefinition für das Klassenkalkül in einem abstrakten, mathematischen Bereich und verwendet im Rahmen der Erfüllung auch Folgen mit unendlich vielen Gliedern. Für die Aussagefunktionen schließt er dennoch aus, dass diese unendlich sein können. Kann es also prinzipiell keine unendlich langen Aussagen geben? Wenn doch, warum schließt Tarski sie dennoch aus? Gibt es eine Möglichkeit seine Wahrheitsdefinition auf solche Aussagen auszuweiten?

II

Um zu verstehen, warum Tarski sich nur auf endliche Aussagefunktionen bezieht, möchte ich zuerst betrachten, ob unendliche Aussagen überhaupt möglich sind und was wir mit ihrer Hilfe beschreiben können, das nicht durch endliche Aussagen dargestellt werden könnte. Die Ressourcen für unendlich lange Aussagen sind sowohl in der Umgangssprache als auch in Tarskis Objektsprache gegeben. Tarski benutzt in der Sprache, die er für seine Wahrheitsdefinition benutzt, nur sehr wenige Operatoren: Das Inklusionszeichen, das Negationszeichen, den Allquantor, die logische Alternative und eine unendliche Anzahl Variablen. Die Anzahl der meisten dieser Zeichen scheint dabei allerdings nicht beliebig zu sein. Variablen können nicht alleine stehen, die Inklusion bezieht sich immer auf genau zwei Variablen, die Negation wird meist nur einmal – oder bei doppelter Negation auch zweimal – vor eine Aussage gesetzt und der Gebrauch des Allquantors hängt von der Anzahl der Variablen in der Aussage ab. Man könnte zwar auch durch Negationen oder Allquantoren unendlich lange Aussagen zusammensetzen – im Falle der Negation würde man eine unendliche Anzahl von Negationen vor eine Aussage setzen und im Falle des Allquantors könnte man über eine unendliche Anzahl von Variablen quantifizieren (unabhängig von der Anzahl von Variablen in der Formel, über die quantifiziert wird) – aber in diesen beiden Fällen würde man mit der unendlichen Aussage nichts ausdrücken, das sich von einem

Ausdruck mit einer endlichen Zahl von Negationen bzw. Allquatoren unterscheidet. Anders ist das jedoch bei der logischen Alternative. Durch die logische Alternative kann eine unendliche Anzahl von verschiedenen Aussagen miteinander verknüpft werden. Um ein leicht zu überblickendes Beispiel zu geben, könnte man z.B. eine solche Aussagefunktion in Betracht ziehen:

Ix,x,,+ Ix,,x,,,+ Ix,,,x,,,, + I x,,,,x,,,,, + ...

Auch wenn die drei Punkte als Zeichen für die Fortsetzung Zweifel erregen können, scheint mir hier doch klar zu sein, was gemeint ist und wie die Unendlichkeit entsteht. Aufgrund der Variablen ist Tarskis Sprache recht unanschaulich und es lässt sich schwer sagen, ob hier durch die unendlich lange Aussage mehr gesagt werden kann als mit einer ähnlichen, endlich langen. An diesem Beispiel lässt sich jedoch zeigen, dass es unendliche Aussagefunktionen gibt, die erfüllbar sind. Da nur einer der Summanden erfüllt sein muss, um eine logische Summe zu erfüllen, würde für die Erfüllung dieser Aussagefunktion jede Folge genügen, in der mindestens einmal zwei Mengen aufeinander folgen, von denen die erste Teilmenge der zweiten ist. Wahr ist diese Aussagefunktion jedoch nicht, denn es gibt auch Folgen, die sie nicht erfüllen. Es sind aber auch wahre, unendliche Aussagefunktionen denkbar, z.B. eine unendliche Konjunktion von Inklusionen, die sich darauf beziehen, dass jede Menge Teilmenge ihrer selbst ist. (Ix,x, + Ix,,x,, + ...)

Wenn wir nicht mit Variablen umgehen wollen, bleibt als Bereich, in dem es am Unverfänglichsten ist, von Unendlichkeit zu sprechen, der Bereich der Zahlen. Hier kann man unendliche Aussagen treffen, die wir im Allgemeinen auch als wahr anerkennen würden. Um diese in Tarskis Sprache auszudrücken, müssten wir ihr jedoch entweder die jeweils benutzen Mengen als Konstanten hinzufügen, also unendlich viele, oder wir müssten die Zahlen mit Hilfe des Klassenkalküls definieren, was jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll. An dieser Stelle genügt es uns, in der Umgangssprache anzugeben, wie die betreffende Aussage zu konstruieren ist. Das ist natürlich nicht für alle Aussagefunktionen möglich, jedoch müssen unendliche Formeln nach irgendeiner Regel aufgebaut sein, damit wir sie und ihren Wahrheitsgehalt erfassen können. Als Beschreibung einer solchen Aussage könnte zum Beispiel diese dienen:

Die Menge aller natürlichen Zahlen von 0 bis zu einer beliebigen Zahl n ist Teilmenge der natürlichen Zahlen von 0 bis zu der Zahl n+1, $n \to \infty$.

Vom Aufbau her ist diese Aussage ähnlich der oben angegebenen Aussagefunktion. Sie besteht aus unendlich vielen Konjunktionen von Inklusionen, die sich hier statt auf Variablen auf konkrete Mengen beziehen. Wir erkennen diese Aussage als eine wahre Aussage. Aus einer generellen Skepsis dem Infinitismus gegenüber könnte man natürlich bezweifeln, dass es sich überhaupt um eine Aussage handelt. Akzeptiert man jedoch den Infinitismus zumindest in der Mathematik, gibt es keinen Grund, sie nicht als wahre Aussage zu bezeichnen. Wie wir also sehen, ist es nicht generell unmöglich, unendlich lange Aussagen zu bilden und diesen einen Wahrheitswert zuzuordnen.

Ein Argument dagegen, unendliche Formeln in die Definition aufzunehmen, könnte sein, dass der Mensch nur einen Bruchteil von ihnen zu verstehen kann, nämlich diejenigen, die nach einer bestimmen Regel konzipiert sind. Alle anderen bleiben schon allein wegen der begrenzten Lebenszeit und wohl auch wegen des begrenzten Gedächtnisses des Menschen uneinsehbar. D.h. wir können auch nicht herausfinden, ob eine Folge diese Funktion erfüllt oder nicht. Allerdings schließt Tarski in seiner Definition zwar unendliche, aber nicht sehr lange endliche Aussagefunktionen aus. Zu jeder möglichen endlichen Aussage gibt es eine längere, die weiterhin endlich ist. Es ist also klar, dass es uns irgendwann auch nicht mehr möglich wäre, diese langen Aussagen zu begreifen, und selbst wenn jemand aufgrund ausgezeichneter Gedächtnisleistung und eines langen Lebens eine sehr lange Aussagefunktion erfassen könnte - es gäbe immer noch eine längere. Also kann dies nicht der Grund für Tarski gewesen sein, unendliche Aussagefunktionen auszuschließen.

III

Vermutlich sind die Gründe, unendlich lange Funktion auszuschließen am ehesten methodische. Deshalb ist es interessant, sich anzuschauen, wo sie ausgeschlossen werden und auf welche Teile der Definition das wesentliche Auswirkungen hat. Tarski schließt bereits aus, dass irgendein Ausdruck aus einer unendlichen Anzahl von Zeichen besteht und in Folge dessen natürlich auch, dass eine Aussagefunktion unendlich lang sein kann. Er bezeichnet auch die Stelle, an der er es ausschließt, begründet den Ausschluss jedoch nicht. Es geschieht in Axiom 5:

Axiom 5. (Das Prinzip der vollständigen Induktion). Sei X eine Klasse, welche folgende Bedingungen erfüllt: (α) ng ε X, sm ε X, al ε X und in ε X; (β) ist k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl, so $v_k \in X$*; (γ) ist* $x \in X$ *und* $y \in X$*, so auch* $x \cap y \in X$*. Dann gehört jeder Ausdruck zu Klasse X.*[1]

[1] A.Tarski: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen; S.29

(α) und (β) sagen, das die beschriebenen Zeichen, Operatoren und Variable, zur Klasse der Ausdrücke gehören. In (γ) wird beschrieben, dass wenn zwei Ausdrücke hintereinander geschrieben werden, ein weiterer Ausdruck entsteht. (γ) bedingt auch die Endlichkeit der Ausdrücke. Die kleinsten möglichen Ausdrücke sind endlich. Wenn ich jedoch zwei endlich Ausdrücke hintereinander schreibe, erhalte ich wieder einen endlichen Ausdruck. Selbst wenn ich diesen Vorgang sehr oft wiederhole, kann der Ausdruck zwar sehr lang werden, aber nicht unendlich lang. Um aus endlichen Ausdrücken einen unendlichen Ausdruck zu erhalten, müsste ich unendliche viele aneinanderfügen. Nach dem hier von Tarski verwendeten Axiom ist es jedoch nur möglich, immer zwei aneinander zu fügen. Selbst wenn wir unendlich lange Zeit hätten, um immer wieder zwei aneinanderzufügen, würde die Länge des Ausdruckes zwar gegen Unendlich streben, wäre aber trotzdem zu jedem Zeitpunkt endlich. Da Aussagefunktionen nur eine spezielle Form von solchen Ausdrücken sind, ist es klar, dass es auch keine unendlichen Aussagefunktionen geben kann. Jedoch auch ohne dieses Axiom würde die Definition der Aussagefunktionen unendlich lange Aussagen ausschließen. Betrachten wir dazu die Definition in der nicht rekursiven Form aus der Fußnote 25:

Definition 10. x ist eine Aussagefunktion dann und nur dann, wenn, wenn jede Klasse X, welche folgende vier Bedingungen erfüllt: (α) sind k und l natürliche von 0 verschiedene Zahlen so $\iota_{k,l} \varepsilon X$*; (β) ist* $y \varepsilon X$ *so auch* $\bar{y} \varepsilon X$*; (γ) ist* $y \varepsilon X$ *und* $z \varepsilon X$*, so auch* $y + z \varepsilon X$*; (δ) ist k eine von 0 verschiedene natürliche Zahl und ist* $y \varepsilon X$*, so* $\cap_k y \varepsilon X$ *– auch der Formel:* $x \varepsilon X$ *genügt.*[2]

(α) beschreibt hierbei die kleinsten möglichen Aussagefunktionen. In (β) bis (δ) werden Aussagefunktionen beschrieben, die mit Hilfe der Operatoren aus diesen gewonnen werden können. Hierbei handelt es sich aber wieder nur um Zusammensetzungen von endlich vielen Zeichen, so dass auch die gesamte Funktion, wie oben beschreiben, nur endlich lang sein kann.

Man könnte nun annehmen, dass Tarski sich hier auf endliche Aussagefunktionen beschränkt, weil unendlich lange Funktionen die Definition stark verkompliziert hätten oder gar nicht in sie aufgenommen werden könnten. Deshalb scheint es sinnvoll, sich anzuschauen, wie die Definition 10 hätte aussehen müssen, damit sie auch unendlich lange Aussagefunktionen zulässt. Ich beziehe mich hier der Einfachheit halber nur auf die Bedingung (γ), da mir Unendlichkeit hier am interessantesten erscheint. Im Unterschied zur gegebenen Definition

[2] ebenda; S. 33 (Fußnote 25)

dürften wir in der neuen Definition also die Anzahl der Summanden nicht begrenzen. Um eine mögliche Konstruktionsweise zu finden, könnten wir die Definition 4 in Tarskis Wahrheitsdefinition betrachten. Dort definiert Tarski die logische Summe einer endlichen n-gliedrigen Folge t von Ausdrücken folgendermaßen:

Definition 4. x ist eine logische Summe der Ausdrücke $t_1, t_2,\dots t_n$ [...] – symbolisch $x = \sum^{n}{}_k t_k$ dann und nur dann, wenn t eine endliche n-gliedrige Folge von Ausdrücken ist, welche eine der folgenden Bedingungen erfüllt: (α) $n = 1$ und $x = t_1$, (β) $n > 1$ und $x = \sum^{n-1}{}_k t_k + t_n$.[3]

In dieser Definition bezieht sich Tarski nun ausdrücklich nur auf endlich lange Folgen. Diese entstehen dann, wenn für n eine endliche Zahl gewählt würde. Um nun eine unendliche lange Aussagefunktion zu erlangen, müsste $n = \infty$ gewählt werden. Die zusätzliche Bedingung in Definition 10 könnte also in etwas so aussehen:

(ε) es gibt eine unendliche Folge von Ausdrücken t und $t_1, t_2, \dots t_n \varepsilon X$, $n = \infty$, und $y = \sum_{k=1}^{\infty} t_k$, so auch $y \varepsilon X$.

Die unendliche Folge von Ausdrücken zu bilden, stellt kein Problem dar, da „die Klasse aller Ausdrücke unendlich (...) ist“[4]. Das Sigma steht meist nicht für die logische Summe, kann hier jedoch äquivalent gebraucht werden Es ist jedoch fraglich, ob Tarksi mit einer solchen Definition zufrieden gewesen wäre: Man könnte das Vorkommen der Fortsetzungspunkte innerhalb der Definition bemängeln. Es wäre vorstellbar, dass Tarski sie lieber gemieden hätte, obwohl er sie in Definition 4 selbst benutzt. Definition 4 ist auf dem Weg zur Definition der Wahrheit eher nebensächlich, während die Definition der Aussagefunktion einen wesentlicher Schritt auf dem Weg dorthin darstellt. Es scheint aber nicht möglich, eine solche Definition ohne Fortsetzungspunkte zu formulieren.

Da man also möglich die Definition 10 auf unendliche Aussagefunktion ausweiten kann, auch wenn die Definition dadurch komplizierter wird, muss Tarski einen anderen Grund haben, sie auszuschließen. Um den zu finden, ist es hilfreich, sich Tarskis Definition von Wahrheit und den vorhergehenden Begriff der Erfüllung genauer anzuschauen. Tarski benutzt die rekursive Methode für die Definition. Das ist notwendig, da es unendlich viele verschiedene

[3] ebenda; S.32
[4] ebenda; S.30

Aussagefunktionen geben kann. Wäre dies nicht der Fall, könnte er seine Definition geben, indem er die Wahrheitsbedingungen für jede einzelne Aussage direkt definiert und diese Teildefinitionen verbindet. So definiert er nun Wahrheit als die Erfüllung durch jede beliebige Folge von Mengen. An Definition 23, der Wahrheitsdefinition, zeigt sich das Problem für unendlich lange Aussagefunktionen noch nicht, da die Folgen, die Tarski benutzt, unendlich lang sind. Also könnte - auch bei unendlich vielen freien Variablen - jeder davon eine bestimmte Menge zugeordnet werden. Wenn Formel und Aussagefunktion insoweit regelmäßig wären, dass wir sie überblicken können, könnten wir dann entscheiden, ob wir die entstandene Aussage für wahr halten oder nicht. Dies scheint intuitiv gleichbedeutend zu sein mit dem, was Tarski als Erfüllung bezeichnet. Seine Erfüllungsdefinition greift jedoch nicht für unendlich lange Aussagefunktionen. Das hängt damit zusammen, wie die Definition aufgebaut ist:

Definition 22. Die Folge f erfüllt die Aussagefunktion x dann und nur dann, wenn f eine unendliche Folge von Klassen und x eine Aussagefunktion ist, welche eine von den vier folgenden Bedingungen erfüllen: (α) es gibt solche natürliche Zahlen k und l, das $x = \iota_{k,l}$ *und* $f_k \subset f_l$*; (β) es gibt eine solche Aussagenfunktion y, so dass* $x = \overline{y}$ *und f die Funktion y nicht erfüllt; (γ) es gibt solche Aussagefunktionen y und z , dass* $x = y + z$ *und dass f entweder y oder z erfüllt; (δ) es gibt eine solche natürliche Zahl k und eine solche Aussagefunktion y, dass* $x = \cap_k y$ *und dass hierbei jede unendliche Folge von Klassen, die sich von f höchstens an der* k^{ten} *Stelle unterscheidet, die Funktion y erfüllt.*[5]

(α) ist das wichtigste an dieser Definition. Es stimmt mit der Form überein, die alle Teildefinitionen haben würden, wenn es möglich wäre, die Wahrheitsdefinition durch Aufzählungen aufzustellen. (β) – (δ) geben an, wann längere Aussagefunktionen erfüllt sind. Deren Erfüllung hängt jedoch immer von der Erfüllung der Funktionen an ab, aus denen die längere Funktion zusammengesetzt ist. Wenn wir also eine längere Aussagefunktion vorliegen haben, müssen wir sie also nach den Regeln der Bedingungen (β) – (δ) so lange auseinander nehmen, bis wir zu den einzelnen Inklusionen kommen. Erst dann können wir mit Hilfe von (α) feststellen, ob die Aussagefunktion durch eine bestimmte Folge erfüllt wird. Hier zeigt sich nun das Problem, das unendlich lange Aussagefunktionen bei dieser Art von Definition darstellen. Wenn wir eine sehr lange, aber endliche Funktion haben, ist es prinzipiell möglich,

[5] ebenda; S. 51

diese durch Zerlegen in die einzelnen Inklusionen herunterzubrechen. Genausowenig jedoch, wie man aus zwei endlich langen Aussagefunktionen eine unendlich lange zusammensetzen kann, kann man aus einer unendlichen Aussagefunktion durch Teilung an irgendeiner Stelle zwei endliche Aussagefunktionen erhalten. Wenn ich von einer unendlich langen Kette von Zeichen eine endliche lange abtrenne, bleiben immer noch unendlich viele Zeichen in der Kette. Wir können zwar einzelne Inklusionen abtrennen, nie aber alle Inklusionen einzeln vorliegen haben. Da ich aber nur dann feststellen kann, ob eine Folge eine Aussagefunktion erfüllt, wenn ich die einzelnen Inklusionen betrachte, ist es unmöglich, bei unendlich langen Aussagefunktionen zu entscheiden, ob sie erfüllt sind. Dieses Problem stellt sich vor allem dann eingängig dar, wenn wir es mit einer unregelmäßigen unendlichen Aussagefunktion zu tun haben. Bei regelmäßigen Aussagefunktionen können wir von einer endlichen Anzahl von Teilfunktionen auf die gesamte Funktion schließen. Bei unregelmäßigen Funktionen jedoch bleiben, unabhängig wie groß die (endliche) Anzahl von Einzelfunktionen ist, die wir betrachtet haben, immer noch unendlich viele, deren Form wir noch nicht kennen. Deshalb können wir nie einen Überblick über sie gewinnen.
Wir haben also gesehen, dass die Form der Definition, die Tarski hier wählt, es ausschließt, unendlich lange Aussagen in die Betrachtung einzubeziehen. Deswegen scheint es konsistent, dass Tarski sie erst gar nicht als Aussagen betrachtet.

IV

Es stellt sich demnach die Frage, ob es überhaupt möglich ist, eine Wahrheitsdefinition für unendlich lange Aussagefunktionen zu geben. Da das Problem, dass durch Tarskis Art der Definition auftaucht, sich speziell auf diese Form der Definition bezieht, können wir annehmen, dass die andere Form, die Tarski vorschlägt, auch auf unendlich lange Aussagefunktionen anwendbar ist. Tarski gibt ja zunächst an, wie Teildefinitionen der Wahrheit anhand von einzelnen Sätzen gegeben werden könnten. Dass er auf diese Weise seine Wahrheitsdefinition nicht aufbauen kann, liegt daran, dass es unendliche viele verschiedene Aussagefunktionen geben kann. Unabhängig davon, ob es ein System geben kann, das nur endlich viele Aussagen hat, dabei aber unendlich lange zulässt, scheint es doch möglich, auf diese Weise Wahrheitsdefinitionen für einzelne, unendlich lange Aussagefunktionen zu geben. Das Beispiel, das Tarski für eine solche Teildefinition im Falle einer endlich langen Aussage gibt, sieht aus wie folgt:

$\cap_1\cap_2(\iota_{1,2} + \iota_{2,1})$ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn – für beliebige Klassen a und b – $a \subset b$ oder $b \subset a$.[6]

Wir brauchen für eine solche Definition also zum einen den Namen für die Aussage und zum anderen ihre Übersetzung in die Metasprache. Wollen wir nun die Wahrheit einer unendlich langen Aussagefunktion angeben, können wir als Namen für die Aussagefunktion die Schreibweise verwenden, die ich als Ergänzung zu Definition 10 eingeführt habe. Bezüglich der Metasprache müssen wir Tarski insoweit ergänzen, als wir unendlich viele Symbole für Klassen brauchen, die wir möglichst einfach durchnummerieren können. Hierzu möchte ich den Buchstaben a mit den natürlichen Zahlen als Indices verwenden. Eine mögliche Teildefinition könnte dann so aussehen:

$\sum_{n=1}^{\infty} \iota_{n,n+1}$ ist eine wahre Aussage dann und nur dann, wenn es unendlich viele Klasse a_1 bis a_∞ gibt und es gilt: $a_1 \subset a_2$ oder $a_2 \subset a_3$ oder $a_3 \subset a_4$ usw.

Die hier ausgewählte Aussagefunktion ist regelmäßig und sehr einfach. Würden die Funktionen komplizierter werden, würde auch die Definition schnell länger und komplizierter, so dass es bald nicht mehr möglich wäre, sie noch aufzuschreiben. Wir können uns aber auch vorstellen, wie eine Teildefinition einer unregelmäßigen, nicht auf dem Papier zu realisierenden Aussagefunktion aussehen müsste. Es müsste wie bei den anderen Teildefinitionen auf der einen Seite der strukturell-deskriptive Name und auf der anderen Seite die dazugehörige Übersetzung in die Metasprache stehen. Dennoch bietet das nicht die Chance eine Wahrheitsdefinition zu bilden, da die unendlich große Anzahl von verschiedenen Aussagen eine Aufzählung nicht zulässt. Dies war ja bereits für Tarski der Grund, seine Form der Definition zu wählen.

Die hier verwendete regelmäßige, unendliche Aussagefunktion hat jedoch noch eine andere Eigenschaft: Mit Hilfe des Allquantors ist es sehr leicht möglich, sie in eine endliche Aussage umzuschreiben. Sie sagt dasselbe aus wie die Aussage $N\Pi x,\Pi x,,NIx,x,,$. Diese Parallelität ist in zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen zeigt sie, dass jemand, der unendlich lange Aussagen aus prinzipiellen Gründen ablehnt, auch dem Allquantor gegenüber skeptisch sein müsste. Also wäre es inkonsequent, unendliche Aussagen wegen Zweifeln am Infinitismus auszuschließen, solange wir den Allquantor benutzen. Zum anderen deutet sie an, dass man eventuell alle unendlichen Aussagefunktionen, deren Inhalt der Mensch zu erfassen imstande ist, unter Verwendung des Allquantors auch durch endliche Funktionen ausdrücken könnte. Dies würde bedeuten, dass es zumindest keinen direkten Verlust für Tarskis Definition

[6] ebenda: S.45

bedeutet, nicht über die Wahrheit von unendlich langen Aussagen entscheiden zu können, da diejenigen, deren Wahrheitswert wir einsehen können, in endliche Aussagen umgeformt werden könnten. Angenommen dies wäre möglich, hätten wir dennoch noch immer keine Möglichkeit, innerhalb Tarksis System über die Wahrheit von unregelmäßigen unendlich langen Aussagefunktionen zu entscheiden. Sie können sicher nicht in endlicher Form dargestellt werden. Man könnte natürlich bezweifeln, dass wir solche Funktionen, da sie nicht zu überblicken sind, innerhalb unserer Sprache überhaupt brauchen. Man könnte sie deshalb aus der Sprache ausschließen. Allerdings könnte man genauso gut davon ausgehen, dass die Unmöglichkeit, diese Funktionen zu überblicken, einzig und allein eine menschliche Begrenzung ist und keine Eigenschaft der Aussagefunktionen selbst. Dann könnten wir eine Art Gottesperspektive annehmen, die z.B. zeitliche Unendlichkeit überblickt, und damit auch über den Wahrheitsgehalt einer solchen, unendlichen Aussage entscheiden.

V

Ich habe hier versucht zu zeigen, wie wir uns unendlich lange Aussagefunktionen vorstellen können, und, dass es unter ihnen einige gibt, die wir auch verstehen könnten. Danach habe ich dargelegt, an welcher Stelle und warum Tarski sie trotzdem aus seiner Wahrheitsdefinition ausschließt. Außerdem habe ich über Möglichkeiten für eine Wahrheitsdefinition für solche Funktionen nachgedacht. Ich kann hierfür keine Lösung anbieten, sondern möchte nur zeigen, dass Tarski, vielleicht notwendigerweise, mit seiner Wahrheitsdefinition für eine Gruppe von Aussagen keine Lösung bietet. Ob diese Aussagen in unserer Sprache nicht nur möglich, sondern für sie tatsächlich wichtig sind, ist eine Frage, die ich hier nicht entscheiden möchte.

Quelle:

A.Tarski: „Der Wahrheitsbegriff in der formalisierten Sprachen“ in K.Berka/L.Kreiser: „Logik-Texte“ Akademieverlag, Berlin; 1971